TD2 :

EX1 : ① vrai. si f est affine. alors il existe a et b tel que

$$f(x) = ax + b \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

par la définition du taux d'accroissement.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1 + b - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0}$$

$$= a = \text{constante}.$$

Réciproquement, si le taux d'accroissement est C.

Alors $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = C(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= \underbrace{Cx}_{ax} \underbrace{- Cx_0 + f(x_0)}_{+\,b}$$

② vrai.

On dit que f est dérivable au point x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se rapproche d'une valeur limite. quand $h \to 0$.

la tangente à la courbe C_f en x_0 est la droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

③ Faux.

Une fonction composée : $H = f \circ g$

$$H'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) \neq f'(x) \circ g'(x)$$

exemple : $H = \sqrt{x^2 + 1}$.

H est une fonction composée $f \circ g$ avec $f = \sqrt{x}$, $g = x^2 + 1$

on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad g'(x) = 2x$

Donc. $(f \circ g)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = H'(x)$

EX3 :

On dit que f est dérivable au point x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(\underset{1}{x_0}+h)-f(x_0)}{h}$ se rapproche d'une valeur limite quand $h \to 0$.

la tangente à la courbe C_f en x_0 est la droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1}.$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h+1} - \overbrace{\frac{2}{1+1}}^{=1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h+2} - 1\right)$$

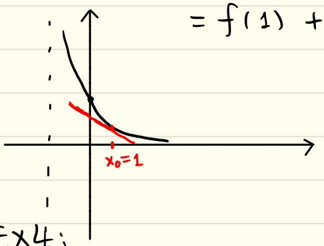
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2-(h+2)}{h+2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{-\cancel{h}}{h+2} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h+2} = -\frac{1}{2}$$

La tangente en $x_0 = 1$ est la droite d'éq :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$= f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{2}{1+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)\times(x-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



EX4 :

Remarque : si f est dérivable en x_0, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

① $f(x) = x^2 - 3x + 7$. elle est définie sur $\mathbb{R}$.

$f(x)$ est dérivable en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1^2 - 3\times 1 + 7 = 5.$$

Ex4:

② $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\quad (x-1) = (x-1)\times 1$

On voit que le numérateur $x^2-1 \to 0$ quand $x \to 1$

$x-1 \to 0$ quand $x \to 1$

C'est une forme indéterminée. $\frac{0}{0}$

Donc on factorise en haut et en bas par $(x-1)$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1+1 = 2$

③ $f(x) = \dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{x^2-3x+2}$

On remarque que 1 est une racine de x^2-3x+2, car $1^2-3\times 1+2=0$

1 est - - - - - - $x^3-8x^2+19x-12$, car $1^3-8\times 1^2+19-12=0$

Donc x^2-3x+2 et $x^3-8x^2+19x-12$ peuvent factoriser par $(x-1)$.

c-à-d, $x^2-3x+2 = (x-1)(x+b) = (x-1)(x-2)$

$\underline{x^3-8x^2+19x-12} = (x-1)(x^2+cx+d)$

pour trouver b, c, d on développe.

$x^2-3x+2 = x^2 \underbrace{-x+bx}_{(b-1)x} -b$. on trouve $b=-2$

$b-1=-3$

$-b=2$

$x^3-8x^2+19x-12 = x^3+cx^2+dx-x^2-cx-d$

$= x^3+(c-1)x^2+(d-c)x-d$

on trouve $\begin{cases} -8 = c-1 \\ 19 = d-c \\ -12 = -d \end{cases} \Rightarrow d = 12, \quad c = -7$

Donc. $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2-7x+12)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \dfrac{x^2-7x+12}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Alors. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{1^2-7\times 1+12}{1-2} = \dfrac{6}{-1} = -6$

④ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

le numérateur $x^2 - 3x + 2 \longrightarrow 0$, quand $x \to 1$

le dénominateur $x^3 - 1 \longrightarrow 0$ quand $x \to 1$

on factorise en haut et en bas par $(x-1)$

d'où $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \dfrac{x-2}{x^2+x+1}$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{1-2}{1^2+1+1} = -\dfrac{1}{3}$

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x+b) = x^2 - x + bx - b = x^2 + bx - x - b$

$= x^2 + (b-1)x - b \quad x^2 + (b-1)x - b$

$$\left.\begin{array}{l} b - 1 = -3 \\ -b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow b = -2$$

TD2. Ex5.

① $f = \frac{1}{4}x^3$.

1°: par la définition. $x_0 = 2$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}(2+h)^3 - \frac{1}{4}\cdot 2^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{8}+12h+6h^2+h^3-\cancel{8}}{4h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{4}(\underset{\downarrow 12}{12} + \underset{\downarrow 0}{6h} + \underset{\downarrow 0}{h^2}) = \frac{1}{4}\times 12 = 3$$

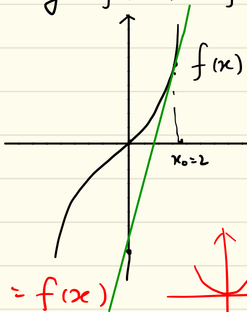
quand $h\to 0$

Donc. $f'(2) = 3$

La tangente: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f(2) + 3(x-2)$

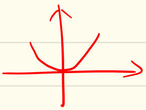
$= 2 + 3(x-2) = 3x-4$.

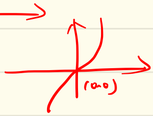
$f(x) = \frac{1}{4}x^3$



paire: $f(-x) = f(x)$

impaire: $f(-x) = -f(x)$





$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

EX5 · 2 $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$.

calculer la dérivée de $f(x)$ en $x_0 = 4$.

$f(x) = 1 + 2x^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f'(x) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

$g(x) = x^n$

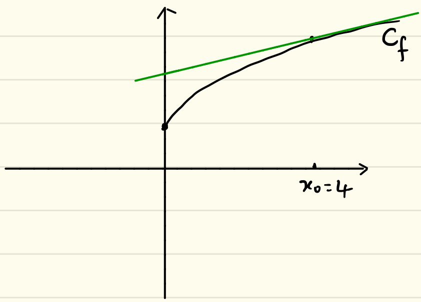
$g'(x) = n x^{n-1}$

la tangente en $x_0 = 4$. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= f(4) + f'(4)(x - 4)$

$= 1 + 2 \times \sqrt{4} + \frac{1}{2} \times (x - 4)$

$= 1 + 4 + \frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2}x + 3$



$f(0) = 1$. $f(4) = 5$

Exo6 :

① $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x - 2. \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 7\times 3x^2 + 8$

$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad = 12x^3 - 21x^2 + 8$

② $f(x) = 17x^2 - \sqrt{x}.$ $\qquad D_f = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}.\ x \geqslant 0\}.$

$= 17x^2 - x^{1/2}$

Donc $f'(x) = 17 \times 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 34x - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

Attention : $f(x)$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$

③ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$ $\qquad D_f = \mathbb{R}.$

$f(x) = v \circ u$ avec $v = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $u = x^2 + 1.$

on a $v'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$ $\qquad u'(x) = 2x$

Donc. $f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

④ $f(x) = 8 \cdot x^{-1} - 7x^{-3} \Rightarrow f'(x) = 8 \times (-1) x^{-2} - 7 \times (-3) x^{-4}$

$D_f = \mathbb{R}^*$ $\qquad = -8x^{-2} + 21x^{-4}$

⑤ $f(x) = \frac{2+x}{2-x}.$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

$f(x)$ est un quotient. $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 2+x,\ v = 2-x.$

Donc. $u' = 1 \qquad v' = -1$

Donc $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \times (2-x) - (2+x) \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2}$

$$= \frac{4}{(2-x)^2}$$

⑥ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2 - 7.\ v = x - 3.$ donc $u' = 2x.\ v' = 1$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x \times (x-3) - (x^2-7) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}$

⑦ $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+2}}$. est définie pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1-x}{x^2+1} \geq 0$ et $x^2+2 \neq 0$

Donc. $f(x)$ est définie pour $1-x \geq 0$, c-à-d. $x \leq 1$

$D_f =]-\infty, 1]$ f est dérivable sur $]-\infty, 1]$

$f(x)$ est une fonction composée $f = h \circ g$ avec $h = \sqrt{x}$, et $g = \dfrac{1-x}{x^2+2}$

$g(x) = \dfrac{1-x}{x^2+1} = \dfrac{v}{u}$ avec $v = 1-x$, $u = x^2+2$

on a $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v' = -1$, $u' = 2x$.

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{v' \times u - v \times u'}{u^2} = \frac{-1 \times (x^2+2) - (1-x) \times 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \times g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}} \times \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2} = \frac{\sqrt{x^2+2}}{2\sqrt{1-x}} \; \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \; \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^{3/2}}$$

Révision : $(u+v)' = u' + v'$ $\qquad \frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u-v)' = u' - v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

Comment calculer la dérivée d'une fonction composée ?

$(f \circ g)(x)$. $\qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \neq f'(x) \circ g'(x)$

---

⑦ $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$ t.q $\frac{1-x}{x^2+2} \geq 0$ et $x^2+2 \neq 0$

mais $x^2+2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x)$ est définie pour $1-x \geq 0$, c-à-d. $x \leq 1$

$\Rightarrow D_f =]-\infty, 1]$ $\qquad$ f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

$f(x)$ est une fonction composée $f = h \circ g$ avec $h = \sqrt{x}$.

$g = \frac{1-x}{x^2+2} = \frac{u}{v}$ avec $u = 1-x$, $v = x^2+2$

Donc. $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad u' = -1$, $v' = 2x$

On a $g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-1 \times (x^2+2) - (1-x) \times 2x}{(x^2+2)^2}$

$$= \frac{-x^2-2-2x+2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

Donc. $f'(x) = h'(g(x))\, g'(x)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}} \cdot \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{1-x}} \; \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

Ex 9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$. $\Rightarrow$ est un poly

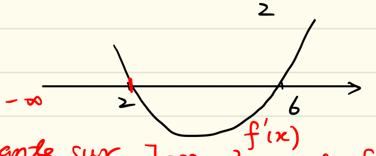
la dérivée. $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$

On étudie le signe du $f'(x)$. c'est un poly de degré 2.

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 64 - 48 = 16$

les racines de $f'(x)$ sont $x_1 = \frac{8 + \sqrt{16}}{2} = 6$. $x_2 = \frac{8 - \sqrt{16}}{2} = 2$

la graphe de f'



Donc. f est croissante sur $]-\infty, 2]$, et $[6, +\infty[$

f est décroissante sur $[2, 6]$.

On calcule

$f(2) = \ldots\ldots = \frac{17}{3}$

$f(6) = -5$

$f(0) = -5$

$f(10) = \frac{1000}{3} - 285 \approx 48.3$

le tableau de variation :

x	0		2		6		10
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	−5	↗	$\frac{17}{3}$	↘	−5	↗	48.3